Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2012/13, Serie 10
Prof. Dr. G. Wang — 7.1.2013
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Borelsche Menge und $f : B \to [0, \infty)$ eine nicht-negative messbare Funktion. Man zeige: Die Menge

$$V := \{(x, y) \in B \times \mathbb{R} : 0 \le y \le f(x)\}$$

ist eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$. Genau dann ist f über B integrierbar, wenn das $(n+1)$-dimensionale Lebesguesche Maß von V endlich ist und es gilt

$$Vol_{n+1}(V) = \int_B f(x)dx.$$

Aufgabe 2 (*Volumen von Rotationskörpern*) (4 Punkte)

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ eine stetige Funktion und

$$K := \{(x, y, z) \in [a, b] \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \le f(x)^2.\}$$

Man zeige:

$$Vol_3(K) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das von $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ aufgespannte Dreieck und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini, dass

$$\int_D g(x + y)d\mathcal{L}^2(x, y) = \int_0^1 g(t)tdt.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini den Flächeninhalt der folgenden Fläche $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le xy \le 2 \text{ und } 1 \le \frac{y}{x} \le 2.\}$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 14.1.13 bis 12:00**.